

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания к семинарским занятиям

Составители:
О.В. Бобрешова,
А.В. Паршина,
К.А. Полуместная

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Элементы теории вероятностей.....	4
Понятие вероятности случайного события	6
Классическое определение вероятности события	7
Статистическое определение вероятности события.....	8
Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	11
Формула полной вероятности.....	17
Формула Байеса.....	19
Задачник	21
Рекомендуемая литература	21

стны и одно из них обязательно происходит. Очевидно, что свойство противоположности у них взаимное, т.е. $\overline{\overline{A}} = A$.

Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Условимся обозначать достоверное событие как U , а невозможное – V . Тогда $\overline{A} + A = U$ и $\overline{A}A = V$. При этом условие несовместности событий A и B может быть записано как $AB = V$.

Пример 6. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A – вынут белый шар – достоверное событие U ; событие B – вынут шар другого цвета – невозможное событие V . Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Событие A называется *благоприятным* событию B , если наступление события A влечет за собой наступление события B .

Пример 7. Испытание: бросание игральной кости. События A_2 , A_4 и A_6 – появление соответственно двух, четырех и шести очков, а B – событие, состоящее в появлении четного числа очков. События A_2 , A_4 и A_6 благоприятны событию B .

Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов – результатов испытания, т.е. событий. Система несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n образует *полную группу событий* для данного испытания, если при выполнении заданного комплекса условий одно из событий этой системы должно обязательно произойти. Тогда очевидна справедливость равенства $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$. Простейшей полной группой событий является система A, \overline{A} . Очевидно, что в случае измерения физико-химической величины невозможно перечислить все значения, которые могут быть исходами данного испытания.

Понятие вероятности случайного события

В полной группе событий на появление некоторых результатов можно рассчитывать с большим основанием, на появление других – с меньшим. Величина, определяющая насколько значительны объективные основания рассчитывать на появление события, называется *вероятностью* данного события. Существуют следующие основные принципы задания вероятностей случайного события: классический, геометрический и статистический. Мы подробно остановимся на рассмотрении только двух из них.

Классическое определение вероятности события

Классическое определение вероятностей сводит это понятие к более элементарному понятию равновозможных событий. Пусть событие A представляет собой реализацию одного из m благоприятных случаев (1), входящих в состав полной группы n равновозможных элементарных событий (2):

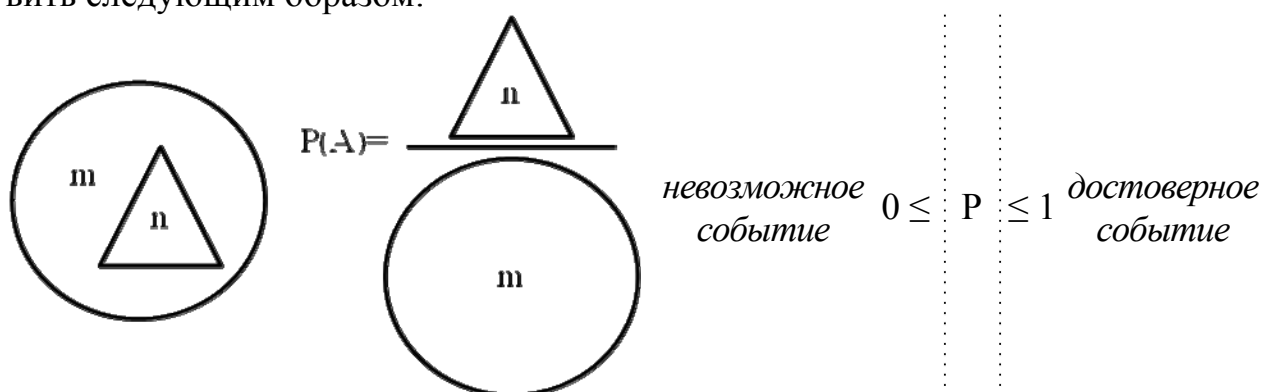
$$A = C_1 + C_2 + \dots + C_m, \quad (4)$$

$$U = C_1 + C_2 + \dots + C_m + C_{m+1} + \dots + C_n. \quad (5)$$

Тогда *вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение числа элементарных событий n , благоприятных событию A , к числу всех равновозможных элементарных событий m :

$$P(A) = \frac{n}{m}. \quad (6)$$

Наглядно классическое определение вероятности события A можно представить следующим образом:



Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

- 1) Вероятность случайного события есть безразмерная положительная величина, заключенная между нулем и единицей. Действительно, случайному событию A благоприятствует лишь некоторая часть n из общего числа m элементарных событий. Поэтому $0 < n < m$ и $0 < (n/m) < 1$. Таким образом, $0 < P(A) < 1$.
- 2) Вероятность достоверного события равна единице $P(U) = 1$.
- 3) Вероятность невозможного события равна нулю $P(V) = 0$.

При решении задач удобно пользоваться следующим алгоритмом.

- 1) Определить, в чем состоит событие A , вероятность которого требуется найти.
- 2) Определить элементарные события, сводя испытание к совокупности случаев. Следует помнить, что при выделении случаев исходят, как правило, из интуитивных соображений о симметрии исходов и их равновозможности.
- 3) Определить количество m всех возможных случаев.
- 4) Определить количество n случаев, благоприятных событию A .

5) Рассчитать вероятность события А с помощью классического определения по формуле (6).

Пример 1. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет однозначный номер?

Решение.

- 1) Пусть событие А – взят билет с однозначным номером.
- 2) Элементарное событие: извлечение одного билета из общей стопки. Будем считать, что каждый отдельный билет имеет одинаковую вероятность быть выбранным, тогда элементарные события образуют полную группу равновозможных несовместных событий.
- 3) Общее количество возможных исходов $m = 25$.
- 4) Число благоприятных событию А исходов $n = 9$ (выбраны билеты с номерами от 1 до 9).
- 5) В соответствии с формулой (6) вероятность события А равна $P(A) = \underline{9/25}$.

Для определения общего количества m вариантов *перестановок* n независимых элементов и для определения общего количества m вариантов *размещения* n элементов по k вариантам ($n \neq k, n > k$) могут быть использованы *формулы комбинаторики* (7) и (8) соответственно:

$$m = n!, \quad (7)$$

$$m_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (8)$$

Если нет необходимости учитывать порядок размещения n элементов по k вариантам, то общее количество m вариантов их размещения уменьшается в соответствии с формулой:

$$m_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (9)$$

Пример 2. Для проверки партии, состоящей из 15 изделий, среди которых находятся 5 бракованных, выбираются 3 изделия. Партия считается бракованной, если браковано хотя бы одно изделие. Требуется найти вероятность того, что партия не будет бракованной.

Решение.

- 1) Пусть событие А – из трех последовательно выбранных деталей нет ни одной бракованной.
- 2) Элементарное событие: последовательное извлечение трех деталей из партии. Такие элементарные события образуют полную группу равновозможных несовместных событий.