 ISBN 5-7890-0344-3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

А. В. БРАТИЩЕВ, А. В. МОРЖАКОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Получено интегральное представление оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда - Леонтьева в пространстве голоморфных функций в односвязной области G для случая G не содержащей 0
***Ключевые слова**: мультипликатор, голоморфная функция, оператор обобщенного дифференцирования, аналитическое продолжение.*

Введение. Пусть G - односвязная область комплексной плоскости C и $\{d_n\}$ - последовательность комплексных чисел. Обозначим $H(G)$ пространство голоморфных в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Оператором обобщенного дифференцирования (ООД) в смысле Гельфонда - Леонтьева в $H(G)$ назовём линейный непрерывный в $H(G)$ оператор D со свойством $Dz^n = d_{n-1}z^{n-1}$, $n \in \mathrm{N}$, $D1 = 0$. Если такой оператор существует, то в силу полноты $\{z^n\}$ в $H(G)$ он единствен. В монографии [1] представление ООД получено в случае круга $G := D(0,R)$ с центром в нуле и радиуса R. Предложенное выше определение в этом случае совпадает с определением из [1], но позволяет рассматривать и случай областей G, не содержащих начало координат.

Основные результаты. Назовём, следуя [2], мультипликатором пары множеств $A, B \subset \mathrm{C}$ множество $M(A,B) := \{z \in \mathrm{C} : z \cdot A \subset B\}$. В частном случае $A = B$ мультипликатор $M(A) := M(A,A)$ назовем мультипликатором множества A [3].

Под произведением двух множеств $A, B \subseteq \mathrm{C}$ будем понимать множество $AB := \{z_1 z_2 : z_1 \in A,\, z_2 \in B\}$. $A^{-1} := \left\{z \in \overline{\mathrm{C}} : \frac{1}{z} \in A\right\}$. Для чисел $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, обозначим угол $(\alpha, \hat{}\beta) := \{z \in \mathrm{C} \setminus \{0\} : \alpha < \arg z < \beta\}$. $A' := \overline{\mathrm{C}} \setminus A$. Множество A называется звездным (относительно начала координат), если $\forall z \in A$ отрезок $[0,z] \subseteq A$.

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть G - односвязная область в C. Тогда:

1) $M(G) = (0,1]$ тогда и только тогда, когда $0 \notin G$, $G \cup \{0\}$ – звездное множество, G не совпадает с углом вида $(\alpha, \hat{}\beta)$;

2) пусть каждый луч с началом в нуле пересекает G по интервалу (из которых хотя бы один конечен и хотя бы один не начинается в нуле) или по пустому множеству. Тогда $M(G)=\{1\}$.

Доказательство. 1) Необходимость. $0 \notin G$, так как $0 \in G \Leftrightarrow 0 \in M(G)$ ([2],теорема 1). Так как $\forall z \in G \quad [0,z]=\{0\}\cup(0,1]z \subset \{0\}\cup G$, то $\{0\}\cup G$ есть звездное множество. $G \neq (\alpha,\hat{}\beta)$, так как в противном случае по теореме 3 [2] $M((\alpha,\hat{}\beta))=(0,+\infty)$.

Достаточность. Так как $G\cup\{0\}$ звёздное, то $[0,1]\subset M(G\cup\{0\})$. Тогда по теореме 2 [2]

$$(0,1]\subset M(G\cup\{0\})\setminus\{0\}=M((G\cup\{0\})\setminus\{0\})=M(G).$$

Пусть $x>1$, $x\in M(G)$. Так как $M(G)$ является моноидом ([2], теорема 2), то $\{x^k\}\subset M(G)$. Отсюда $(0,\infty)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(0,1]x^k \subseteq M(G)$. В этом случае G необходимо ([2],теорема3) должно совпадать с $\mathrm{C}\setminus\{0\}$ или с $(\alpha,\hat{}\beta)$, что невозможно по условию. Поэтому $(1,+\infty)\bigcap M(G)=\varnothing$. $0\notin M(G)$, так как $0\notin G$.

Осталось показать, что $M(G)\cap(\mathrm{C}\setminus[0,+\infty))=\varnothing$. Покажем сначала, что существует луч $(0,+\infty e^{i\varphi})$, не пересекающийся с G. В противном случае $\forall\varphi \quad \exists z=re^{i\varphi}\in G \quad \exists\varepsilon>0$: "сектор" $(0,1]\cdot D(z,\varepsilon)\subset G$ и имеет раствор, равный $2\arcsin\frac{\varepsilon}{r}$. Выделим из открытого покрытия отрезка $[0,2\pi]$ интервалами $\left(\varphi-\arcsin\frac{\varepsilon}{r},\varphi+\arcsin\frac{\varepsilon}{r}\right)$ конечное подпокрытие. Тогда соответствующее конечное объединение секторов $\bigcup\limits_{k=1}^{N}(0,1]\cdot D(z_k,\varepsilon_k)$, которое $\subset G$ и содержит внутри себя некоторое кольцо. Это значит, что точки $0,\infty$ принадлежат разным связным компонентам дополнения к G. Получили противоречие с односвязностью G.

Пусть $z_0=r_0e^{i\varphi_0}\in M(G)\setminus[0,1]$. Если $(0,+\infty e^{i\varphi})\cap G=\varnothing$, то и $(0,+\infty e^{i(\varphi-\varphi_0)})\cap G=\varnothing$. В противном случае для точки z_1 из последнего множества $z_0z_1\in G$, $z_0z_1\in(0,\infty e^{i\varphi})$, что невозможно. В целом счетное объединение лучей

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(0,+\infty e^{i(\varphi-\arg z_0{}^n)}\right)\cap G=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(0,+\infty e^{i\left(\varphi-\left\{\frac{1}{2\pi}\arg z_0^n\right\}2\pi\right)}\right)\bigcap G=\varnothing,$$

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ ɈqdqɎqɏè