

# Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 15

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И КИБЕРНЕТИКА**

**№ 3 • 2015 • ИЮЛЬ–СЕНТЯБРЬ**

Издательство Московского университета

*Выходит один раз в три месяца*

---

## СОДЕРЖАНИЕ

Любимов Н. А. Применение метода интегральных уравнений в задаче синтеза гласных русского языка . . . . .	3
Гончаров О. И. Синтез контура магнитного управления плазмой токамака с учетом особенностей системы питания . . . . .	11
Роговский А. И., Краев А. В., Фомичёв В. В. О приведении векторной системы к виду с относительным порядком . . . . .	20
Стрелковский Н. В. Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации . . . .	27
Киселёв Ю. Н., Орлов С. М. Исследование модифицированной модели Рамсея с переменной эластичностью производства . . . . .	35
Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах константной длины для обобщенных итеративных контактных схем . . . . .	42

# CONTENTS

Liubimov N. A. Integral equation method for synthesis of russian vowels . . . . .	3
Goncharov O. I. Power supply model dependent tokamak magnetic system control synthesis . . . . .	11
Rogovskiy A. I., Kraev A. V., Fomichev V. V. On the reduction of MIMO control system to the form with relative degree . . . . .	20
Strelkovskii N. V. Construction of a guaranteed closed-loop guidance strategy for a linear control system with incomplete information . . . . .	27
Kiselev Yu. N., Orlov S. M. Investigation of modified Ramsey model with variable output elasticity . . . . .	35
Romanov D. S., Romanova E. Yu. On the single fault detection test sets of constant cardinativity for generalized iterative switching circuits . . . . .	42

УДК 519.632.4:519.673

**Н. А. Любимов<sup>1</sup>****ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ГЛАСНЫХ РУССКОГО ЯЗЫКА\***

В данной статье описан метод интегральных уравнений для поиска решения внутренней задачи Гельмгольца с граничными условиями 3-го рода (импедансного типа). Полученное решение используется для описания волновых процессов в системе речевого тракта человека в момент произнесения гласных звуков. Для синтеза сигнала во временной области применяется модель источник–фильтр. Действие голосовых связок в качестве источника акустического возбуждения описывается моделью Лильенкрантца–Фанта. В качестве фильтра используется спектральная передаточная функция, формируемая на основе решения интегрального уравнения. В рамках аудиальных тестов подтверждается большая достоверность синтезируемых гласных ([a], [y], [и]) в сравнении с синтезом, использующим иные модели акустического речеобразования.

*Ключевые слова:* метод интегральных уравнений, внутренняя задача Гельмгольца, импеданс, источник–фильтр, модель Лильенкрантца–Фанта, синтез речи, передаточная функция.

**1. Введение.** Акустическая теория речеобразования имеет довольно долгую историю начиная с наиболее ранних работ Гельмгольца [1], а также трудов Фанта [2] и Рабинера [3]. Подробный анализ ранних математических моделей дан в [4].

Целостное описание явлений распространения звуковых волн в речевом тракте человека является весьма сложным процессом, поскольку должны быть учтены многие эффекты, влияющие на характер порождаемого на выходе звукового поля. К таким эффектам относятся: кривизна речевого тракта, характер колебания голосовых связок, излучение при открытом ротовом отверстии, подвижность и проницаемость стенок речевого тракта. Простейшие и наиболее часто используемые на практике модели пользуются одномерным приближением для описания функции звукового давления или скорости потока частиц. К таким моделям можно отнести, например, уравнение Вебстера относительно волновой функции давления  $p(z, t)$ , где  $0 \leq z \leq L$  — пространственная координата распространения плоской волны вдоль речевого тракта длины  $L$ ,  $t > 0$  — время и  $c$  — скорость звука:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( A(z) \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

Колебания голосовых связок и излучение ротового отверстия задаются граничными режимами. Функция  $A(z)$  представляет собой переменную площадь поперечного сечения цилиндра, внутри которого распространяются волны. Уравнение Вебстера хорошо изучено и имеет аналитические решения для некоторых частных случаев формы речевого тракта [5, 6]. В более общем случае, например, когда функция  $A(z)$  задана таблично, задача разрешается численно. Эффективным численным методом решения считается так называемая *схема Келли–Локбаума* [7], основанная на представлении Даламбера искомого решения в виде бегущих волн и его последующей дискретизации по временной и пространственной переменным:

$$p(z, t) = \overrightarrow{p}(z - ct) + \overleftarrow{p}(z + ct) \xrightarrow{z=i\Delta z, t=n\Delta t} \overrightarrow{p}_i(n) + \overleftarrow{p}_i(n).$$

Данная схема обобщается для двумерного и трехмерного случая моделирования речеобразования, в том числе в неоднородных средах распространения волн [8, 9]. Основными проблемами при работе с такими многомерными *цифровыми волноводами* (digital waveguide) являются жесткие ограничения, налагаемые на сетку пространственно-временной дискретизации, и сопутствующее им возрастание вычислительной сложности при переходе к многомерным случаям [10].

<sup>1</sup> Факультет ВМК МГУ, асп., e-mail: lubimov.nicolas@gmail.com

\* Настоящие исследования проводятся при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.579.21.0058), проект № RFMEFI57914X0058.

В других работах [11, 12] рассматриваются задачи, изначально учитывающие многомерность структуры речевого тракта, а следовательно, убирающие предположение о плоскости распространения волнового фронта. В работе [11] предложена двумерная модель, где роль области излучения играет полубесконечный цилиндр. Авторы сравнивают предлагаемую модель с описанным выше уравнением Вебстера. В обоих случаях для получения решения рассматривается численный метод конечных элементов. Важным заключением, сделанным в данной работе, является экспериментально подтвержденный факт расхождения решения уравнения Вебстера с решением рассматриваемой двумерной задачи в области высоких частот. Авторы поясняют это тем, что для больших волновых чисел при заданной геометрии речевого тракта возникают поперечные моды большей амплитуды, которые вносят ошибку в продольной аппроксимации волновой функции. Более сложная трехмерная модель речевого тракта рассмотрена в работе Ханнукайнена и Луккари [12]. Акустическое поле в ограниченной области  $\vec{x} \in \Omega$  описывается уравнением колебаний  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$  относительно потенциала скоростей  $u = u(\vec{x}, t)$ . Особое внимание уделено граничным условиям в области голосовых связок, которое задается в виде  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{\frac{c}{\rho}}u$ , где  $\rho$  — плотность среды.

В описанных моделях остается не учтенным характер влияния стенок речевого тракта, определяемый потерями энергии и подвижностью стенки под действием звукового давления. В обоих случаях вводится допущение о непроницаемости стенок, выражаемое в виде граничного условия в форме Неймана  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Трехмерная модель речеобразования, предлагаемая в данной работе, использует постановку задачи, схожую с [12], однако при этом учитывается подвижность стенок речевого тракта.

В качестве основных компонентов речевого тракта рассматриваются голосовые связки и прилегающая к ним область, боковые стенки речевого тракта и язык, образованные мягкими тканями человеческого тела, заполненная воздухом полость речевого тракта (гортань), а также ротовое отверстие, которое может быть либо открыто (как в случае произнесения гласных звуков), либо закрыто (для некоторых взрывных согласных, таких как [б]). В данном приближении исключены некоторые другие внутренние органы, играющие роль в речеобразовании. Действие этих органов неявно включено в граничные условия рассматриваемой задачи. Например, легкие и подвязочная область учитываются при описании звукового поля на голосовой щели. Носовая полость не учитывается, поскольку она играет существенную роль только для сонорных согласных ([н], [м]). В остальных случаях небная занавеска закрыта и таким образом замыкает поверхность речевого тракта. Действие губ можно также приближенно включить в описание поля на границе ротового отверстия.

**2. Метод интегральных уравнений.** На схематичном рис. 1 изображена область, участвующая в процессе речеобразования в рамках текущей модели. В соответствии с вышеперечисленными компонентами речевого тракта эта область задается следующим образом:  $S_0$  — граница со стороны голосовой щели,  $S_1$  — граница, определяемая стенками речевого тракта,  $S_2$  — виртуальная граница, описывающая ротовое отверстие,  $V$  — внутренняя область речевого тракта. Полная поверхность речевого тракта образована сочленением частичных границ  $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ . Вектор нормали  $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$  является внешним по отношению к области  $V$ .

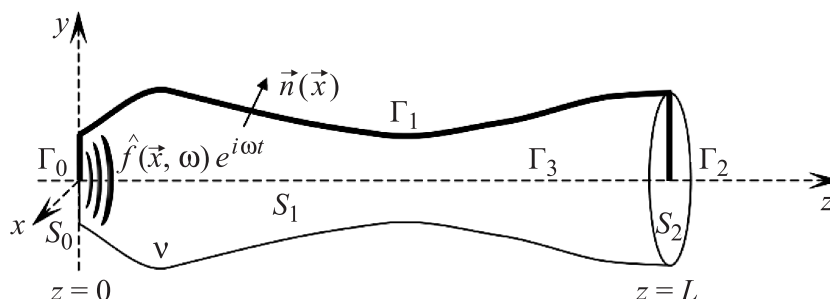


Рис. 1. Схематичное изображение трехмерного речевого тракта  $V$  человека от голосовой щели ( $z = 0$ ) до ротового отверстия и области губ ( $z = L$ )

Звуковые колебания образуются потоком воздуха, порождаемым легкими и проходящим через голосовую щель. За счет сокращения голосовых связок воздушный поток приобретает характер гармонических колебаний. Поэтому можно говорить, что в области  $S_0$  присутствует постоянный источник возбуждения вида  $\hat{f}(\vec{x}, \omega)e^{i\omega t}$ , где  $\hat{f}(\vec{x}, \omega) \in \mathbb{C}$ . Конкретный вид источника описывается моделью колебания голосовых связок *Лильенкранца–Фанта* [13], которая будет рассмотрена ниже.

Рассматривается внутренняя задача Гельмгольца относительно функции  $u(\vec{x}, \omega) \in \mathbf{C}^2(\mathcal{V}) \cup \mathbf{C}^2(\mathcal{S})$ , с граничными условиями 3-го рода (импедансного типа):

$$\Delta u(\vec{x}, \omega) + k^2 u(\vec{x}, \omega) = 0, \quad \vec{x} \in \mathcal{V}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}, \omega) + \alpha(\vec{x}, \omega)u(\vec{x}, \omega) = f(\vec{x}, \omega), \quad \vec{x} \in \mathcal{S}, \quad (2)$$

где  $\alpha(\vec{x}, \omega) \in \mathbf{C}(\mathcal{S})$  и  $f(\vec{x}, \omega) \in \mathbf{C}(\mathcal{S})$  — заданные непрерывные по пространственной координате функции. Импедансные граничные условия соответствуют моделям, описанным в работах [14, 15] (для стенок речевого тракта) и [16] (для открытого ротового отверстия).

Как известно [17], с помощью основной интегральной формулы Грина решение (1) представимо\* в виде

$$u(\vec{x}) = \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial u}{\partial n_{\vec{y}}}(\vec{y})G(\vec{x}, \vec{y}) - u(\vec{y})\frac{\partial G}{\partial n_{\vec{y}}}(\vec{x}, \vec{y}) \right) ds_{\vec{y}}, \quad G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{e^{ikR(\vec{x}, \vec{y})}}{4\pi R(\vec{x}, \vec{y})}, \quad (3)$$

где  $G(\vec{x}, \vec{y})$  — функция Грина. С использованием предельного перехода  $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$  на границе  $\mathcal{S}$  интегральная формула (3) преобразуется к виду

$$\Omega(\vec{x})u(\vec{x}) = \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial u}{\partial n_{\vec{y}}}(\vec{y})G(\vec{x}, \vec{y}) - u(\vec{y})\frac{\partial G}{\partial n_{\vec{y}}}(\vec{x}, \vec{y}) \right) ds_{\vec{y}},$$

где функция  $\Omega(\vec{x})$  равна величине телесного угла, образуемого касательными к  $\mathcal{S}$  в точке  $\vec{x}$ . В частности, для регулярной поверхности  $\Omega(\vec{x}) = \frac{1}{2}$ .

При подстановке сюда  $\frac{\partial u}{\partial n}$  из граничного условия (2) интегральное представление переходит в уравнение относительно неизвестной функции  $u(\vec{x}) \in \mathcal{S}$ :

$$\frac{1}{2}u(\vec{x}) + \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial G}{\partial n_{\vec{y}}}(\vec{x}, \vec{y}) + \alpha(\vec{y})G(\vec{x}, \vec{y}) \right) u(\vec{y}) ds_{\vec{y}} = \int_{\mathcal{S}} G(\vec{x}, \vec{y})f(\vec{y}) ds_{\vec{y}}. \quad (4)$$

Интегральное уравнение (4) можно также записать в операторном виде

$$u + \mathbf{A}[\alpha u] + \mathbf{B}[u] = \mathbf{A}[f], \quad (5)$$

вводя потенциалы простого и двойного слоя

$$\mathbf{A}[\psi] = 2 \int_{\mathcal{S}} G(\vec{x}, \vec{y})\psi(\vec{y}) ds_{\vec{y}}, \quad \mathbf{B}[\psi] = 2 \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial G}{\partial n_{\vec{y}}}(\vec{x}, \vec{y})\psi(\vec{y}) ds_{\vec{y}}.$$

В силу слабой сингулярности подынтегральных функций потенциалы простого и двойного слоев представляют собой компактные операторы, действующие в пространстве непрерывных функций  $\mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathbf{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{S})$ . Поэтому для доказательства существования и единственности решения интегрального уравнения (5) применима альтернатива Фредгольма.

Ядро оператора  $\mathbf{I} + \mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}$  совпадает с ядром интегрального уравнения, определяющего решение внешней задачи Дирихле через потенциал двойного слоя (см. теорему 3.15 из [18]):  $\ker(\mathbf{I} + \mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}) = \ker(\mathbf{I} + \mathbf{B})$ . Равенство имеет место, поскольку функция Грина всюду положительна, и, следовательно,  $\ker \mathbf{A} = \{0\}$ . В свою очередь в силу теоремы 3.17 из [18]  $\ker(\mathbf{I} + \mathbf{B}) = \ker(\mathbf{I} + \mathbf{B}^*)$ , где  $\mathbf{B}^*$  обозначает сопряженный оператор. Иными словами, подпространство нулей исходного интегрального оператора (5) совпадает с решением однородной внутренней задачи Неймана. Если волновое число  $k$  не является собственным значением внутренней задачи Неймана, то у данной однородной задачи существует только нулевое решение. В этом случае  $\ker(\mathbf{I} + \mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}) = 0$  и в силу

\*Далее для краткости частотную переменную опускаем, подразумевая  $u(\vec{x}) = u(\vec{x}, \omega)$ .