

М. И. Шабунин
Ю. В. Сидоров

Теория функций комплексного переменного

6-е издание, электронное

Рекомендовано

Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика», а также для других математических и естественнонаучных направлений и специальностей и по смежным направлениям и специальностям в области техники и технологий



Москва
Лаборатория знаний
2025

УДК 517.9
ББК 22.161.1
Ш13

Шабунин М. И.

Ш13 Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2025. — 303 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-849-4

В учебнике рассматриваются методы теории функций комплексного переменного, которые часто применяются в прикладных задачах: операции с функциями комплексного переменного, разложения в ряды, конформные отображения, вычисление интегралов с помощью вычетов, основы операционного исчисления. В книге разобрано большое количество примеров, помогающих читателю глубже освоить теорию и приобрести навыки решения практических задач.

Студентам физико-математических и инженерно-физических специальностей университетов и вузов с расширенной математической подготовкой.

**УДК 517.9
ББК 22.161.1**

Деривативное издание на основе печатного аналога: Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 4-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2018. — 300 с. : ил. — ISBN 978-5-00101-135-4.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-93208-849-4

© Лаборатория знаний, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Введение	5
§ 1. Комплексные числа	5
1. Определение комплексного числа	5
2. Комплексно сопряженные числа	6
3. Модуль комплексного числа	7
4. Свойства арифметических операций над комплексными числами	8
5. Геометрическая интерпретация комплексного числа ..	9
6. Тригонометрическая форма комплексного числа	11
7. Показательная форма комплексного числа	12
8. Извлечение корня	14
§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел	15
1. Предел последовательности	15
2. Расширенная комплексная плоскость	17
§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости	19
1. Непрерывные кривые	19
2. Кусочно-гладкие кривые	22
3. Области	24
4. Непрерывная деформация кривой	28
§ 4. Непрерывные функции комплексного переменного	28
1. Предел функции	28
2. Непрерывность функции в точке и в области	29
3. Непрерывность функции на кривой	30
4. Непрерывность функции в области вплоть до границы	31
5. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции	33
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного	37
1. Определение интеграла	37
2. Свойства интегралов	40
3. Оценки интегралов	40
§ 6. Функция $\text{Arg } z$	42
1. Полярные координаты	42
2. Приращение аргумента вдоль кривой	43
3. Непрерывные ветви функции $\text{Arg } z$	46

Глава 2. Регулярные функции	50
§ 7. Дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана	50
1. Производная	50
2. Условия Коши–Римана	52
§ 8. Интегральная теорема Коши	55
1. Теорема Коши	55
2. Следствия и дополнения к интегральной теореме Коши	56
3. Первообразная	59
§ 9. Регулярные функции. Степенные ряды	62
§ 10. Интегральная формула Коши	66
§ 11. Свойства регулярных функций	69
1. Свойства функций, дифференцируемых в области	69
2. Примеры разложения регулярных функций в ряды Тейлора	70
3. Достаточные условия регулярности функции в области	71
4. Лемма об устранимой особенности (о стирании пункта)	72
§ 12. Гармонические функции. Теоремы о среднем	74
§ 13. Обратная функция	79
1. Понятие обратной функции	79
2. Однолистные функции	81
3. Функция $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, и обратная к ней	81
4. Функция $w = e^z$ и обратная к ней	84
§ 14. Теорема единственности	85
1. Нули регулярной функции	85
2. Теорема единственности	88
§ 15. Ряд Лорана	91
1. Разложение регулярной функции в ряд Лорана	91
2. Единственность разложения функции в ряд Лорана	95
3. Примеры разложений рациональных функций в ряды Лорана	95
§ 16. Изолированные особые точки однозначного характера	98
1. Классификация изолированных особых точек	98
2. Устранимая особая точка	98
3. Полус	99
4. Существенно особая точка	102
5. Исследование особых точек с помощью рядов Лорана	104
6. Ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$	106
7. Теорема Лиувилля	109

Глава 3. Многозначные аналитические функции	111
§ 17. Понятие аналитической функции и ее регулярной ветви ...	111
1. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей .	111
2. Аналитическое продолжение вдоль кривой	114
3. Суперпозиция аналитических функций	116
4. Определение аналитической в области функции	116
5. Аналитические и регулярные ветви полных аналитических функций	117
§ 18. Логарифмическая функция	119
1. Определение логарифмической функции	119
2. Свойства логарифмической функции	120
3. Регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} z$	128
4. Регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} f(z)$	129
5. Арифметические операции над аналитическими функциями	136
§ 19. Степенная функция	139
1. Определение степенной функции	139
2. Свойства степенной функции	139
3. Регулярные ветви функции $\sqrt[n]{z}$	144
4. Регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$	145
5. Римановы поверхности функций $\operatorname{Ln} z$ и \sqrt{z}	149
§ 20. Особые точки аналитических функций. Граничные особые точки	151
1. Особые точки аналитических функций	151
2. Точки ветвления	151
3. Граничные особые точки регулярных функций	159
Глава 4. Теория вычетов и ее применения	162
§ 21. Теоремы о вычетах	162
1. Определение вычета	162
2. Вычисление вычета в полюсе $z_0 \neq \infty$ и в регулярной точке $z = \infty$	164
3. Формулы для вычисления интегралов с помощью вычетов	167
§ 22. Применение теории вычетов к вычислению интегралов	172
1. Вычисление интегралов $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$	172
2. Вычисление интегралов от регулярных ветвей аналитических функций	174
3. Вычисление интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	175
4. Вычисление интегралов $\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx$	181

5. Вычисление интегралов $\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta R(x) dx$	186
6. Вычисление интегралов $\int_0^{+\infty} R(x) dx$	193
§ 23. Принцип аргумента. Теорема Руше	194
1. Принцип аргумента	194
2. Теорема Руше	197
§ 24. Мероморфные функции	199
1. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби	200
2. Разложение целой функции на элементарные множители	203
Глава 5. Конформные отображения	206
§ 25. Геометрический смысл производной	206
1. Линейное растяжение и угол поворота кривой в точке	206
2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной	207
§ 26. Локальные свойства отображений регулярными функциями	209
1. Теорема об n -значной обратной функции	209
§ 27. Принцип сохранения области	211
§ 28. Принцип максимума для регулярной и гармонической функций	211
§ 29. Однолистные функции	213
§ 30. Определение и общие свойства конформных отображений	216
§ 31. Дробно-линейные отображения	221
1. Конформность	221
2. Групповое свойство	221
3. Круговое свойство	222
4. Свойство сохранения симметрии	224
5. Дробно-линейное отображение, переводящее три точки в три точки	227
6. Примеры дробно-линейных отображений	228
§ 32. Конформные отображения элементарными функциями	231
1. Функция $w = z^2$	231
2. Функция $w = \sqrt{z}$	236
3. Функция $w = z^\alpha$	238
4. Функция e^z	240
5. Функция $w = \operatorname{Ln} z$	242
6. Функция Жуковского	243
7. Функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратная к функции Жуковского	253
8. Тригонометрические и гиперболические функции	256
9. Разные примеры	258

§ 33. Принцип симметрии	265
1. Симметрия относительно действительной оси	265
2. Применения принципа симметрии	267
3. Симметрия относительно окружности	271
§ 34. Отображения многоугольников	273
§ 35. Задача Дирихле	277
1. Постановка задачи Дирихле. Существование и единственность решения	277
2. Инвариантность уравнения Лапласа относительно конформных отображений	278
3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге	280
4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости	282
5. Функция Грина задачи Дирихле	283
Глава 6. Операционное исчисление	286
§ 36. Преобразование Лапласа	286
1. Оригинал и его изображение	286
2. Свойства преобразования Лапласа	287
§ 37. Восстановление оригинала по его изображению	291
1. Формула обращения преобразования Лапласа	291
2. Теорема разложения	292
§ 38. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений	292
Литература	295