ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 475, № 5, с. 487–489

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© 2017 г. А. Д. Баев*, В. В. Панков

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 28.01.2017 г.

Поступило 06.03.2017 г.

В работе исследованы задачи в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, которые вырождаются на границе полосы в уравнение нечётного порядка. Получены коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании и единственности решений таких задач в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева. Нормы в этих пространствах определяются с помощью специального интегрального преобразования.

DOI: 10.7868/S0869565217230013

Теория вырождающихся эллиптических уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Такие уравнения описывают математические модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В работе рассматриваются эллиптические уравнения порядка $2m$, вырождающиеся на границе в уравнение порядка $2k-1$ ($k = 1, 2, \ldots$, $2m > 2k-1$) по одной из переменных. Краевые задачи для таких уравнений относятся к неклассическим задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при "степенном" характере вырождения было начато в [1]. В работах А.Д. Баева [2, 3] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений некоторых краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. При этом, в отличие от работы [4], не требуется, чтобы основная весовая функция $\alpha(t)$ принадлежала пространству $C^{\infty}(R^1)$. В частности, в [3] были исследованы краевые задачи для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение чётного порядка. Краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе $t = 0$ в уравнение третьего порядка по одной из переменных, были изучены в [5, 6].

В настоящей работе получены коэрцитивные априорные оценки в специальных весовых пространствах и теоремы о существовании и единственности решений краевых задач в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе $t = 0$ в уравнение нечётного порядка по одной из переменных.

Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ – некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b(-1)^k \partial_t^{2k-1} v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}$, b, $a_{\tau j}$ – комплексные числа, $\operatorname{Im} \bar{b} a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\,\partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^{\tau} = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}\ldots\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)v\big|_{t=0} = \sum_{|\tau|\le m_j} b_{\tau j} D_x^{\tau}\partial_t^{j-1} v\big|_{t=0} = G_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

Воронежский государственный университет
**E-mail: alexsandrbaev@mail.ru*

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} \bar{b} L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + \max\limits_{1 \leq j \leq k}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причём $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7], для него можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \to \tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau = \varphi(t)},$$

где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $F_{\eta \to \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что даёт возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщённых функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u(t) \in C^s[0, d]$ и удовлетворяет условиям $u(0) = \partial_t u(0) = \ldots = \partial_t^{s-1}(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha\left[D_{\alpha, t}^j u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$ при всех $j = 0, 1, \ldots, s$. С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений (см. [8, 9]).

Введём пространства, в которых будет изучаться задача (1)–(3).

Определение 1. Пространство $H_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ ($s \geq 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x, t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]} \left\| F_{\xi \to x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}\left(s - \frac{2m}{2k-1} l\right)} F_\alpha F_{x \to \xi}[\partial_t^l v(x, t)] \right] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$. Здесь $F_{x \to \xi}$ ($F_{\xi \to x}^{-1}$) — прямое (обратное) преобразование Фурье. Если s — натуральное число, такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме:

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{|\tau| + j + \frac{2m}{2k-1} l \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha, t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева–Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_s$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть*

$$s \geq \max\left\{2m, \max_{1 \leq j \leq k}\left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}\right) + \frac{m}{2k-1}\right\}$$

есть целое число, $m \geq 2k - 1$ и выполнены условия 1–3.

Тогда для любого решения $v(x, t)$ задачи (1)–(3), *принадлежащего пространству $H_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$, справедлива коэрцитивная априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leq$$

$$\leq c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k}\left\|B_j v|_{t=0}\right\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}\right),$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* v.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *для любых* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}(R^{n-1})$ *существует единственное решение задачи* (1)–(3), *принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим в полосе R_d^n уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{4}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b(-1)^k \partial_t^{2k-1}v$, оператор $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})$ определён выше.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leq m_j} b_{\tau j} D_x^{\tau} \partial_t^{j-1} v|_{t=0} = G_j(x), \tag{5}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$. На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида (3).

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 4. Для некоторого $s \geq 2m + \max\limits_{1\leq j\leq k-1}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причём $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 5. $\sum\limits_{|\tau|\leq m_j} b_{\tau j}\xi^{\tau} \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть*

$$s \geq \max\left\{2m, \max_{1\leq j\leq k-1}\left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}\right) + \frac{m}{2k-1}\right\}$$

есть целое число, $m \geq 2k-1$ *и выполнены условия* 1, 4, 5. *Тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи* (3)–(5), *принадлежащего пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$, *справедлива коэрцитивная априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leq$$

$$\leq c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1}\left\|B_j v|_{t=0}\right\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}\right),$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* v.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 3 *для любых* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$, $G(x) \in H_{s-m_1-\frac{m}{3}}(R^{n-1})$ *существует единственное решение задачи* (3)–(5), *принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 16–11–10125, выполняемого в Воронежском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишик М.И., Грушин В.В.* // Мат. сб. 1969. В. 79 (121). С. 3–36.
2. *Баев А.Д.* // ДАН. 2008. Т. 422. № 6. С. 727–728.
3. *Баев А.Д.* // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Естеств. науки. 2008. № 3 (62). С. 27–39.
4. *Левендорский С.З.* // Мат. сб. 1980. № 111 (153). С. 483–501.
5. *Баев А.Д., Бунеев С.С.* // ДАН. 2013. Т. 448. № 1. С. 7–8.
6. *Баев А.Д., Бунеев С.С.* // Изв. вузов. Сер. Математика. 2012. № 7. С. 50–53.
7. *Баев А.Д.* // ДАН. 1982. Т. 265. № 5. С. 1044–1046.
8. *Баев А.Д., Кобылинский П.А.* // ДАН. 2016. Т. 466. № 4. С. 385–388.
9. *Баев А.Д., Ковалевский Р.А., Кобылинский П.А.* // ДАН. 2016. Т. 471. № 4. С. 387–390.