МАТЕМАТИКА

УДК 519.635

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2013 г. М.Х. Бештоков

Бештоков Мурат Хамидбиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, ул. Чернышевского, 173, г. Нальчик, 360004, e-mail: beshtokov_murat@rambler.ru.

Beshtokov Murat Khamidbiyevich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Computational Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Chernyshevskiy St., 173, Nalchik, 360004, e-mail: beshtokov_murat@rambler.ru.

Рассматривается нелокальная краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. Для ее решения методом энергетических неравенств в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из которых следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ *в норме* $W_2^1(0,1)$ *на каждом слое.*

Ключевые слова: *краевые задачи, нелокальное условие, уравнение третьего порядка, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем, псевдопараболическое уравнение.*

A nonlocal boundary value problem for the third order pseudo-parabolic equation with variable coefficients is considered. For solving the nonlocal boundary value problem by the method of energy inequalities in the class of sufficiently smooth coefficients and boundary conditions, a priori estimates in differential and difference setting are obtained. The obtained a priori estimates imply uniqueness and stability of the solution of the problem with respect to the initial data and the right-hand side, and also the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem at the rate $O(h^2+\tau^2)$ *in the norm* $W_2^1(0,1)$ *on each layer.*

Keywords: *boundary value problems, nonlocal condition, equation of the third order, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence of difference schemes, pseudo-parabolic equation.*

Математическое моделирование многих процессов приводит к изучению нестандартных начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике.

Важную роль в изучении различных процессов и явлений играют уравнения 3-го и более высоких порядков. Например, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1, 2], передачи тепла в гетерогенной среде [3, 4], влагопереноса в почвогрунтах [5; 6, с. 137] приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются псевдопараболическими уравнениями в частных производных 3-го порядка вида $u_t=\left(ku_x\right)_x+\grave{A}u_{xxt}+f(x,t)$.

Это уравнение называется уравнением Аллера, или модифицированным уравнением влагопереноса в почвогрунтах [5–9].

Особый интерес представляют краевые задачи с интегральными условиями. Из физических соображений условия такого вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины.

В данной работе рассматривается краевая задача для псевдопараболического уравнения 3-го порядка с интегральным условием. Для решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. На их основе доказаны единственность, устойчивость решения задачи, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ в норме $W_2^1(0,1)$ на слое.

Постановка задачи

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T=\{(x,t): 0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ рассмотрим краевую задачу с нелокальным условием

$$u_t=\left(k(x,t)u_x\right)_x+\left(\eta(x,t)u_{xt}\right)_x+r(x,t)u_x-$$
$$-q(x,t)u+f(x,t),\ 0<x<1, 0<t\le T, \qquad (1)$$

$$u(0,t)=\beta_1(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^t \rho(t,\tau)u(1,\tau)d\tau-\mu_1(t),$$
$$0\le t\le T, \qquad (2)$$

$$-\ddot{I}\,(1,t)=\beta_2(t)u(1,t)-\mu_2(t),\ 0\le t\le T, \qquad (3)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ 0\le x\le 1, \qquad (4)$$

где заданные в уравнении (1) и граничных условиях (2) – (4) коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$0 < c_0 \le \eta(x,t);\ k(x,t) \le c_1;$

$$\left|\eta_t(x,t), r(x,t), q(x,t), \beta_1(t), \beta_2(t), \beta_{1,t}(t), \rho(t,\tau), \rho_t(t,\tau)\right| \le \le c_2; \quad (5)$$

$u(x,t) \in C^{4,3}(Q_T)$; $\eta(x,t) \in C^{3,2}(Q_T)$;

$k(x,t) \in C^{3,2}(Q_T)$; $r, q \in C^{2,2}(Q_T)$;

$f(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$; $u_0(x) \in C^2[0,1]$;

$\beta_1(t), \beta_2(t), \mu_2(t), \rho(t,\tau)$ – функции, непрерывные на $[0,\ T]$; $\mu_1(t) \in C^3[0,T]$; $|\beta_1(t)| \le \beta_0 < 1$; $0 \le \tau \le t$; c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные числа. $Q_T = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t \le T\}$;

$\ddot{I}\ (x,t) = k(x,t)u_x + \eta(x,t)u_{xt}$ – полный поток.

Заметим, что нелокальное условие (2) можно заменить условием вида

$$u(0,t) = \beta_1(t)\int_0^\alpha u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(1,\tau)d\tau - \mu_1(t),\ 0 \le t \le T,$$

где $0 \le \alpha \le 1$, α – глубина корнеобитаемого слоя [9] или активного слоя почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации.

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа $M_i, i = 1,2,....$, зависящие только от входных данных задачи (1) – (4).

Допуская существование решения дифференциальной задачи (1) – (4), получим априорную оценку для ее решения. Воспользуемся методом энергетических неравенств. Уравнение (1) умножим скалярно на $U = u + u_t$. Тогда

$$(u_t, U) = \left((ku_x)_x, U\right) + \left((\eta u_{xt})_x, U\right) + (ru_x, U) - -(qu, U) + (f, U), \quad (6)$$

где $(u,v) = \int_0^1 uv dx$, $\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2 dx$.

Преобразуя каждое из слагаемых, входящих в (6), с помощью неравенства Коши с ε с учетом граничных условий (2), (3) находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \times \int_0^1 (k+\eta)u_x^2 dx + \|u_t\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + c_0\|u_{xt}\|_0^2 \le$$
$$\le \ddot{I}\ (x,t)\left[u(x,t) + u_t(x,t)\right]\Big|_0^1 + \varepsilon\|u_t\|_0^2 + + M_1(\varepsilon)\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + M_2(\varepsilon)\|f\|_0^2. \quad (7)$$

Первое слагаемое в правой части (7) оценим с помощью уравнения (1) и условий (2), (3) следующим образом:

$$\ddot{I}\ (x,t)\left[u(x,t) + u_t(x,t)\right]\Big|_0^1 =$$
$$= -(\beta_2(t)u(1,t) - \mu_2(t))\left[u(1,t) + u_t(1,t)\right] + + \left[u(0,t) + u_t(0,t)\right] \times \times \left(\int_0^1 (u_t - ru_x + qu - f)dx + \beta_2(t)u(1,t) - \mu_2(t)\right) \le$$
$$\le \frac{1}{2}\|u_t\|_0^2 + \varepsilon M_3\left(\|u_t\|_0^2 + \|u_{xt}\|_0^2\right) + \frac{1}{2}u_t^2(0,t) + + M_4(\varepsilon)\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + + M_5(\varepsilon)\int_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right)d\tau + + M_6(\varepsilon)\left(\mu_2^2(t) + \mu_1^2(t) + \|f\|_0^2\right). \quad (8)$$

Преобразуем слагаемое $u_t^2(0,t)$ в правой части (8) с помощью (2). Тогда

$$u_t^2(0,t) = \left[\beta_{1,t}(t)\int_0^1 u dx + \beta_1(t)\int_0^1 u_t dx + \rho(t,t)u(1,t) + + \int_0^t \rho_t(t,\tau)u(1,\tau)d\tau - \mu_{1,t}(t)\right]^2 \le$$
$$\le 2\beta_1^2(t)\|u_t\|_0^2 + M_7\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + + M_8\int_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right)d\tau + M_9\mu_{1,t}^2(t). \quad (9)$$

Учитывая оценки (8), (9), из (7) находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (k+\eta)u_x^2 dx + + \|u_t\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + c_0\|u_{xt}\|_0^2 \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2} + \beta_1^2(t)\right)\|u_t\|_0^2 + \varepsilon M_{10}\left(\|u_{xt}\|_0^2 + \|u_t\|_0^2\right) + + M_{11}(\varepsilon)\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + + M_{12}(\varepsilon)\int_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right)d\tau + + M_{13}(\varepsilon)\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_{1,t}^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \quad (10)$$

Выбирая $|\beta_1(t)| \le \beta_0 < 1$, $\beta_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\varepsilon = \min\left\{\frac{1-2\beta_0^2}{4M_{10}}, \frac{c_0}{2M_{10}}\right\}$, из (10) следует

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int_0^1 (k+\eta)u_x^2 dx + \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_{xt}\|_0^2 \le$$
$$\le M_{14}\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + M_{15}\int_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right)d\tau + + M_{16}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_{1,t}^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) по τ от 0 до t:

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \int_0^t \left(\|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_{xt}\|_0^2\right)d\tau \le$$
$$\le M_{17}\int_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right)d\tau + M_{18}\int_0^t\int_0^\tau \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right)d\rho d\tau + + M_{19}\int_0^t \left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_{1,t}^2(t) + \mu_2^2(t)\right)d\tau + + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,1)}^2. \quad (12)$$

Второе слагаемое в правой части (12) оценим следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)dp\,d\tau \le T\int_0^t\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)d\tau . \qquad (13)$$

В силу (13) из (12) получим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\int_0^t\left(\|u_t\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u_{xt}\|_0^2\right)d\tau \le$$

$$\le M_{20}\int_0^t\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)d\tau+M_{19}\times$$

$$\times\left(\int_0^t\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_{1,t}^2(t)+\mu_2^2(t)\right)d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right). \qquad (14)$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (14) с помощью леммы Гронуолла [10, с. 152], получим искомую априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)}+\int_0^t\left(\|u_t\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u_{xt}\|_0^2\right)d\tau \le$$

$$\le M\left(\int_0^t\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_{1,t}^2(t)+\mu_2^2(t)\right)d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right),$$

где M зависит только от входных данных задачи (1) – (4).

Из полученной априорной оценки следует единственность решения исходной задачи (1) – (4) и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме $W_2^1(0,1)$.

Устойчивость и сходимость разностной схемы

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau=$
$=\left\{(x_i,t_j): x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ Nh=1,\ t_j=j\tau,\ j=\overline{0,m},\ m\tau=T\right\}$
дифференциальной задаче (1) – (4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(h^2+\tau^2\right)$ [11]:

$$y_t=\frac{1}{2}\chi\left(aY_{\bar{x}}\right)_x+\left(\gamma y_{\bar{x}t}\right)_x+\frac{1}{2}b^+a^{(+1)}Y_x+$$
$$+\frac{1}{2}b^-aY_{\bar{x}}-\frac{1}{2}dY+\varphi,$$
$$(x,t)\in\omega_{h\tau}, \qquad (15)$$

$$Y_0=\beta_1\sum_{s=0}^{N}Y_{\bar{s}}\hbar+\sum_{s=0}^{j}\rho_s^jY_N^s\bar{\tau}-2\mu_1,\quad t\in\overline{\omega}_\tau, \qquad (16)$$

$$-\left(\frac{1}{2}a_N\chi_NY_{\bar{x},N}+\gamma_Ny_{\bar{x}t,N}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\beta_2Y_N+\frac{h}{2}\left(y_{t,N}+\frac{1}{2}d_NY_N-\varphi_N\right)-\mu_2,$$
$$t\in\overline{\omega}_\tau, \qquad (17)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h, \qquad (18)$$

где $Y=y^{j+1}+y$, $y_t=\dfrac{y^{j+1}-y}{\tau}$, $b^\pm=\dfrac{r^\pm}{k}+O(h^2)$,
$r=r^++r^-$, $|r|=r^+-r^-$, $r^+=0{,}5\left(r+|r|\right)\ge 0$,
$r^-=0{,}5\left(r-|r|\right)\le 0$, $a_i=k(x_{i-0,5},\bar{t})$, $\gamma_i=\eta(x_{i-0,5},\bar{t})$,
$d_i=q(x_i,\bar{t})$, $\varphi_i=f(x_i,\bar{t})$, $\mu_1^j=\mu_1^j(\bar{t})$, $\mu_2^j=\mu_2^j(\bar{t})$,
$\bar{t}=t_{j+0,5}=t_j+0{,}5\tau$, $x_{i-0,5}=x_i-0{,}5h$,

$R=\dfrac{0{,}5h|r|}{k}$ – разностное число Рейнольдса;

$$\chi=\frac{1}{1+R};\ \hbar=\begin{cases}\dfrac{h}{2}, & \text{åñëè } \bar{s}=0,\ \bar{s}=N\\ h, & \text{åñëè } \bar{s}=\overline{1,N-1}\end{cases},$$

$$\chi_0=\frac{1}{1+\dfrac{0{,}5h|r_0|}{k_{0,5}}},\ \text{если } r_0\le 0;$$

$$\chi_N=\frac{1}{1+\dfrac{0{,}5h|r_N|}{k_{N-0,5}}},\ \text{если } r_N\ge 0;$$

$$\bar{\tau}=\begin{cases}\dfrac{\tau}{2}, & \text{åñëè } s=0,\ s=j\\ \tau, & \text{åñëè } s=\overline{1,j-1}\end{cases};$$

Умножим (15) скалярно на $U=Y+y_t$:

$$\left(y_t,U\right)=\left(\frac{1}{2}\chi\left(aY_{\bar{x}}\right)_x,U\right)+\left((\gamma y_{\bar{x}t})_x,U\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}b^+a^{(+1)}Y_x,U\right)+\left(\frac{1}{2}b^-aY_{\bar{x}},U\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2}dY,U\right)+\left(\varphi,U\right), \qquad (19)$$

где $\left(u,v\right)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih$, $\left(u,u\right)=\|u\|^2$, $\left(u,v\right]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih$,

$\left(1,u_{\bar{x}}^2\right]=\|u_{\bar{x}}]|^2$, $[u,v]=\sum_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar$, $[1,u^2]=|[u]|^2$.

После несложных преобразований с помощью неравенства Коши с ε с учетом граничных условий (16), (17) из (19) находим

$$\left(\|y\|^2\right)_t+\|y_t\|^2\le\left(\frac{1}{2}a\chi Y_{\bar{x}}+\gamma y_{\bar{x}t}\right)\left(Y+y_t\right)\Big|_0^N-\left(\frac{1}{2}aY_{\bar{x}},\chi_{\bar{x}}Y\right]-$$
$$-\left(\frac{1}{2}aY_{\bar{x}},\chi Y_{\bar{x}}\right]-\left(\frac{1}{2}aY_{\bar{x}},\chi_{\bar{x}}y_t\right]-\left(\frac{1}{2}aY_{\bar{x}},\chi y_{\bar{x}t}\right]-\left(\gamma,Y_{\bar{x}}y_{\bar{x}t}\right]-$$
$$-\left(\gamma,y_{\bar{x}t}^2\right]+\varepsilon\|y_t\|^2+M_1(\varepsilon)\|\varphi\|^2+$$
$$+M_2(\varepsilon)\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar{x}}]|^2\right). \qquad (20)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части неравенства (20). Используя уравнение (15), получим

$$\left(\frac{1}{2}a\chi Y_{\bar{x}}+\gamma y_{\bar{x}t}\right)\left(Y+y_t\right)\Big|_0^N=$$
$$=\left(\frac{1}{2}a_N\chi_NY_{\bar{x},N}+\gamma_Ny_{\bar{x}t,N}\right)\left(Y_N+y_{t,N}-Y_0-y_{t,0}\right)+$$
$$-\left(Y_0+y_{t,0}\right)\sum_{i=1}^{N-1}\left(y_t-\frac{1}{2}b^+a_{i+1}Y_x-\frac{1}{2}b^-a_iY_{\bar{x}}+\frac{1}{2}dY-\varphi\right)h\le$$
$$\le\left(\varepsilon M_3+M_4h\right)\left(|\,|y_t|\,|^2+|\,|y_{\bar{x}t}]|^2\right)+\frac{1}{2}|\,|y_t|\,|^2+$$
$$+\frac{1}{2}y_{t,0}^2+M_5(\varepsilon)\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar{x}}]|^2\right)+$$
$$+M_6(\varepsilon)\sum_{s=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar{x}}]|^2\right)\bar{\tau}+$$

$$+M_7(\varepsilon)\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right). \qquad (21)$$

Оценим слагаемое $y_{t,0}^2$ с помощью условия (2)

$$y_{t,0}^2=\left[\beta_1^j\sum_{s=0}^{N}y_s^j\hbar+\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_N^s\bar\tau-\mu_1^j\right]_t^2\le$$

$$\le 2\beta_1^2\left(\|y_t\|^2+\frac{h}{2}\left(y_{t,N}^2+y_{t,0}^2\right)\right)+M_8\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)+$$

$$+M_9\sum_{s=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau+M_{10}\mu_{1,t}^2. \qquad (22)$$

С учетом (22) из (21)

$$\left(\frac{1}{2}a\chi Y_{\bar x}+\gamma y_{\bar x t}\right)(Y+y_t)\Big|_0^N\le$$

$$\le(\varepsilon M_{11}+hM_{12})\left(\|y_t\|^2+\|y_{\bar x t}]|^2\right)+\left(\frac{1}{2}+\beta_1^2\right)\|y_t\|^2+$$

$$+M_{13}(\varepsilon)\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)+M_{14}(\varepsilon)\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)+$$

$$+M_{15}(\varepsilon)\sum_{s=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau+$$

$$+M_{16}(\varepsilon)\sum_{s=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau+$$

$$+M_{17}(\varepsilon)\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_{1,t}^2+\mu_2^2\right). \qquad (23)$$

После несложных преобразований из (20) с учетом (23) находим

$$\left(\|y\|^2\right)_t+\left(1,\left(\gamma y_{\bar x}^2\right)_t\right]+\|y_t\|^2+c_0\|y_{\bar x t}]|^2+$$

$$+M_{18}\|Y_{\bar x}]|^2\le$$

$$\le(\varepsilon M_{19}+hM_{20})\left(\|y_t\|^2+\|y_{\bar x t}]|^2\right)+$$

$$+M_{21}\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\left(\frac{1}{2}+\beta_1^2\right)\|y_t\|^2+$$

$$+M_{22}(\varepsilon)\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)+$$

$$+M_{23}(\varepsilon)\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)+$$

$$+M_{24}(\varepsilon)\left(\sum_{s=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau+\sum_{s=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau\right)+$$

$$+M_{25}(\varepsilon)\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_{1,t}^2+\mu_2^2\right). \qquad (24)$$

Выбирая $|\beta_1(t)|\le\beta_0<1$, $\beta_0<\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{1-2\beta_0^2}{8M_{19}},\frac{c_0}{4M_{19}}\right\},\ h\le h_0,$$

$h_0=\min\left\{\frac{1-2\beta_0^2}{4M_{20}},\frac{c_0}{2M_{20}}\right\}$, из (24) получим

$$\left(\|y\|^2\right)_t+\left(1,\left(\gamma y_{\bar x}^2\right)_t\right]+\|y_t\|^2+\|y_{\bar x t}]|^2+$$

$$+\|Y_{\bar x}]|^2\le M_{26}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)+$$

$$+M_{27}\left(\begin{array}{l}\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)+\\ +\sum\limits_{s=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau+\sum\limits_{s=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau\end{array}\right)+$$

$$+M_{28}\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_{1,t}^2+\mu_2^2\right). \qquad (25)$$

Умножим обе части на τ и просуммируем (25) по j' от 0 до j:

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_t]|^2+\|y_{\bar x t}]|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\tau\le$$

$$\le M_{29}\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\tau+$$

$$+M_{30}\left(\begin{array}{l}M_{21}\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum\limits_{j'=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\tau+\\ +\sum\limits_{j'=0}^{j}\sum\limits_{s=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau\tau+\\ +\sum\limits_{j'=0}^{j}\sum\limits_{s=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau\tau\end{array}\right)+$$

$$+M_{31}\sum_{j'=0}^{j}\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_{1,t}^2+\mu_2^2\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2. \qquad (26)$$

Оценим второе, третье, четвертое и пятое слагаемые в правой части (26):

$$M_{30}\left(\begin{array}{l}\sum\limits_{j'=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\tau+\sum\limits_{j'=0}^{j}\sum\limits_{s=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau\tau+\\ +\sum\limits_{j'=0}^{j}\sum\limits_{s=0}^{j}\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\bar\tau\tau\end{array}\right)\le$$

$$\le M_{32}\left(\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2\right)\tau+ \qquad (27)$$

$$+M_{33}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\tau+M_{34}\left(\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right).$$

С учетом (27) из (26) получим

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_t]|^2+\|y_{\bar x t}]|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\tau\le$$

$$\le M_{35}\left(\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2\right)\tau+$$

$$+M_{36}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\tau+M_{37}\times \qquad (28)$$

$$\times\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_{1,t}^2+\mu_2^2\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right).$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau\le\tau_0$, $\tau_0=\frac{1}{M_{35}}$, из (26) с учетом (27) получим

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_t]|^2+\|y_{\bar x t}]|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\right)\tau\le$$

$$\le M_{38}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar x}]|^2\right)\tau+ \qquad (29)$$

$$+M_{39}\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(|[\varphi]|^2+\mu_1^2+\mu_{1,t}^2+\mu_2^2\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right).$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (29) с помощью леммы Гронуолла [12], получим искомую априорную оценку

$$\| y^{j+1} \|^2_{W_2^1(0,1)} + \sum_{j'=0}^{j} \left(\| y_t]|^2 + \| y_{\bar{x}t}]|^2 + \| Y_{\bar{x}}]|^2 \right) \tau \le$$

$$\le M \left(\sum_{j'=0}^{j} \left(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_{1,t}^2 + \mu_2^2 \right) \tau + \| y^0 \|^2_{W_2^1(0,1)} \right), \quad (30)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Итак, справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (5), тогда существуют такие h_0, τ_0, что если $\tau < \tau_0$, $h < h_0$, то для решения разностной задачи (15) – (18) справедлива априорная оценка (30).

Из (30) следует единственность решения задачи, а также устойчивость решения по начальным данным и правой части в сеточной норме $\| y \|^2_{W_2^1(0,1)}$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1) – (4); y_i^j – решение разностной задачи (15) – (18). Обозначим погрешность через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в (15) – (18) и считая $u(x,t)$ заданной функцией, получим задачу для z:

$$z_t = \frac{1}{2}\chi \left(a Z_{\bar{x}} \right)_x + \left(\gamma z_{\bar{x}t} \right)_x + \frac{1}{2} b^+ a^{(+1)} Z_x +$$

$$+ \frac{1}{2} b^- a Z_{\bar{x}} - \frac{1}{2} dZ + \psi,$$

$$(x,t) \in \omega_{h\tau},$$

$$Z_0 = \beta_1 \sum_{s=0}^{N} Z_s \hbar + \sum_{s=0}^{j} \rho_s^j Z_{s,N} \bar{\tau} - 2\nu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$-\left(\frac{1}{2} a_N \chi_N Z_{\bar{x},N} + \gamma z_{\bar{x}t,N} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \beta_2 Z_N + \frac{h}{2} \left(z_{t,N} - \frac{1}{2} d_N Z_N \right) - \nu_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

где $\psi = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешности аппроксимации на решении исходной задачи при каждом фиксированном t^*.

Применяя априорную оценку (30) к задаче для погрешности, получим априорную оценку

$$\| z^{j+1} \|^2_{W_2^1(0,1)} + \sum_{j'=0}^{j} \left(\| z_t]|^2 + \| z_{\bar{x}t}]|^2 + \| Z_{\bar{x}}]|^2 \right) \tau \le$$

$$\le M \sum_{j'=0}^{j} \left(|[\psi]|^2 + \nu_1^2 + \nu_{1,t}^2 + \nu_2^2 \right) \tau,$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из полученной априорной оценки следует сходимость решения схемы (15) – (18) со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$ в сеточной норме

$$\| z \|^2_{(1)} = \| z^{j+1} \|^2_{W_2^1(0,1)} + \sum_{j'=0}^{j} \left(\| z_t]|^2 + \| z_{\bar{x}t}]|^2 + \| Z_{\bar{x}}]|^2 \right) \tau .$$

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты также имеют место, если условие (2) заменить условием

$$u(0,t) = \beta_1(t) u(1,t) + \int_0^t \rho(t,\tau) u(1,\tau) d\tau - \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T .$$

Замечание 2. Полученные в данной работе результаты имеют место и в случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$u_t = \left(k(x,t) u_x \right)_x + \left(\eta(x,t) u_x \right)_{xt} + r(x,t) u_x -$$

$$- q(x,t) u - \alpha(x,t) \int_0^x u(x,t) dx + f(x,t),$$

$$0 < x < 1, \; 0 < t \le T,$$

если условия (5) дополнить еще условиями: $\left| \alpha(x,t) \right| \le c_2$, $\eta(x,t) \in C^{3,3}(Q_T)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (регистрационный номер НИР 1.6197.2011).

Литература

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. № 25, вып. 5. С. 852–864.
2. *Дзекцер Е.С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543.
3. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
4. *Ting T.W.* A cooling process according to two temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 45, № 9. P. 23–31.
5. *Hallaire M.* L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. № 9. P. 17–29.
6. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976. 352 с.
7. *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.
8. *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
9. *Чудновский А.Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сб. тр. по агрофизике. Л., 1969. № 23. С. 41–54.
10. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973. 407 с.
11. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973. 416 с.
12. *Самарский А.А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 2. С. 266–298.

Поступила в редакцию ***3 июня 2012 г.***