ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА и ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Журнал публикует оригинальные статьи и заказные обзоры по механике жидкости, газа, плазмы, динамике многофазных сред, физике и механике взрывных процессов, электрическому разряду, ударным волнам, состоянию и движению вещества при сверхвысоких параметрах, теплофизике, механике деформируемого твердого тела, композитным материалам, методам диагностики газодинамических физико-химических процессов.

Журнал реферируется и аннотируется в следующих изданиях: РЖ Механика; РЖ Физика; European Mathematical Society; Mathematical Reviews; Solid State Abstracts Journal; Applied Mechanics Reviews; Chemical Abstracts; Current Contents/Engineering, Computing, and Technology; SciSearch; Research Alert.

Журнал переводится на английский язык и издается в США издательством SPRINGER под названием «Journal of Applied Mechanics and Technical Physics»

Учредители журнала:
Сибирское отделение РАН
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Т. 55
№ 6 (328)

ПМТФ

Научный журнал

2014

НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ

(*Журнал основан в 1960 г. Выходит 6 раз в год*)

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
2014

ŋdqbyaY bƎ dəqƎbYɜə d əɔɑɓɔʎ ɹdqqYqyè

Адрес редакции:

630090, Новосибирск, Морской просп., 2, редакция журнала
«Прикладная механика и техническая физика»
Тел. 330-40-54; e-mail: pmtf@sibran.ru

Зав. редакцией *О. В. Волохова*
Корректор *Л. Н. Ковалева*

Технический редактор *Д. В. Нечаев*
Набор *Д. В. Нечаев*

Сдано в набор 09.09.14. Подписано в печать 11.11.14. Формат 60 × 84 1/8. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 24,0. Уч.-изд. л. 19,5. Тираж 305 экз. Свободная цена. Заказ № 163.

Журнал зарегистрирован Министерством печати и информации РФ за № 011097 от 27.01.93.
Издательство Сибирского отделения РАН, 630090, Новосибирск, Морской просп., 2.
Отпечатано на полиграфическом участке Ин-та гидродинамики им. М. А. Лаврентьева.
630090, Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 15.

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

В. В. Шелухин, В. В. Неверов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: shelukhin@list.ru, NeverovVladim@gmail.com

Для течений в тонком слое получено обобщение закона Дарси, связывающего среднюю по поперечной координате скорость и градиент давления. С учетом микровращений и предельного напряжения сдвига выведен нелинейный закон Дарси с предельным градиентом. Показано, что микрополярность жидкости проявляется в увеличении кажущейся вязкости и предельного градиента давления. Получено обобщение закона Дарси на случай пвсевдопластических и дилатантных жидкостей Хершеля — Балкли.

Ключевые слова: микрополярная вязкопластическая жидкость, предельное напряжение сдвига, ячейка Хеле-Шоу, обобщенный закон Дарси.

Введение. Ряд природных сред и искусственных материалов (лавины, гранулированные жидкости, кровь, текущая в капиллярах, буровой раствор со шламом при бурении скважин и т. п.) характеризуются микрополярностью и вязкопластичностью. В работе [1] предложена математическая модель, учитывающая оба этих свойства. Под микрополярностью понимается наличие микровращений и микровращательной инерции (например, движение жидких кристаллов). В рамках теории жидкости Бингама вязкопластичность означает существование предельного напряжения сдвига: движение жидкости становится твердотельным, если сдвиговые напряжения не превышают некоторого предела.

Целью данной работы является исследование течения микрополярной вязкопластической жидкости в тонком слое. Подобная задача возникает, например, при заполнении трещины гидроразрыва пласта проппантом [2]. В классической теории вязкопластических жидкостей рассматривается только одно предельное напряжение сдвига τ_*, так как локальные напряжения характеризуются только тензором напряжений Коши T. Однако, для того чтобы описать напряжения в микрополярной жидкости, необходимо дополнительно использовать тензор моментных напряжений N, поэтому в работе [1] введено предельное моментное напряжение τ_n. Локальные деформации в микрополярной жидкости также характеризуются двумя тензорами скоростей деформаций, с помощью которых можно вычислить градиент поля скорости и градиент поля мгновенной угловой скорости. Оба тензора скоростей деформаций должны обращаться в нуль в “сильной” твердотельной зоне. В отличие от классической жидкости Бингама в микрополярной жидкости Бингама могут присутствовать и “слабые” твердотельные зоны, в которых равен нулю только второй тензор скоростей деформаций, т. е. градиент угловой скорости, но первый тензор скоростей деформаций может быть отличным от нуля. В [1] существование "слабой" твердотельной зоны показано численно, а в данной работе этот факт устанавливается аналитическими методами. Кроме того, в настоящей работе в предположении, что толщина слоя течения является малой, получен обобщенный закон Дарси, связывающий градиент давления и среднюю по толщине скорость течения. В отличие от закона, полученного в рамках теории смазки [2], обобщенный закон Дарси является нелинейным. Для жидкости Бингама и Хершеля — Балкли установлено наличие предельного градиента давления p_l: течение отсутствует, если модуль градиента давления не превышает величину p_l. Влияние микровращений проявляется в том, что с увеличением вращательной вязкости увеличиваются как эффективная вязкость, так и предельный градиент давления p_l.

Течения неньютоновских жидкостей в ячейке Хеле-Шоу имеют различные применения (литье под давлением [3], сенсорные дисплеи [4] и т. д.). Такие течения жидкостей со степенной вязкостью рассматривались во многих работах (см., например, [5]), но в них не учитывались предельное напряжение сдвига и микровращения.

Теория микрополярных жидкостей для сплошной среды Коссера [6] изложена в [7]. Существует несколько подходов к описанию жидкости Бингама. В отличие от пионерской работы [8] в данной работе используется метод, развитый в [9–13].

Определяющие уравнения. Подобно твердому телу частица среды Коссера имеет шесть степеней свободы. Каждой материальной точке с лагранжевыми координатами $(t, \boldsymbol{\xi})$ соответствуют вектор эйлеровых координат $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ и тройка взаимно ортогональных векторов-директоров $\boldsymbol{d}_i(t, \boldsymbol{\xi})$, $i = 1, 2, 3$. Ориентация директоров определяется ортогональным тензором $Q(t, \boldsymbol{\xi})$, а их скорость вращения характеризуется тензором $\Omega(t, \boldsymbol{x}) = Q_t Q^*$. Тензор Ω является антисимметричным и определяет локальное вращение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{w} = (1/2)\, \boldsymbol{e}_i \times \Omega\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = (1/2)\, \epsilon : \Omega,$$

где $\{\boldsymbol{e}_i\}_1^3$ — ортонормированный базис; ϵ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{sij} \boldsymbol{e}_s$; $(\epsilon : \Omega)_i \equiv \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}$.

Для матриц A и B размерности 3×3 скалярное произведение $A : B$ определяется формулой $A : B = A_{ij} B_{ij}$, а матрица A^* в ортонормированном базисе совпадает с транспонированной. Пусть $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ — поле скорости, которое в переменных Лагранжа совпадает с производной $\boldsymbol{x}_t(t, \boldsymbol{\xi})$. Тогда тензоры $B = \partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{x} - \Omega$, $A = \partial \boldsymbol{w}/\partial \boldsymbol{x}$ являются тензорами скоростей деформаций, $A_{ij} = \partial \omega_i/\partial x_j$. Отметим, что тензоры B и A объективны по отношению к трансляциям и поворотам [7].

Законы сохранения масс и импульса имеют вид

$$\dot\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad \rho \dot{\boldsymbol{v}} - \operatorname{div} T = \rho \boldsymbol{f},$$

где $(\operatorname{div} T)_i = \partial T_{ij}/\partial x_j$; ρ — массовая плотность; $\boldsymbol{f}$ — плотность массовых сил; точка означает материальную производную. В уравнении момента импульса

$$\rho \dot{\boldsymbol{s}} - \operatorname{div} N = \epsilon : T^* + \rho \boldsymbol{l}$$

величина $\boldsymbol{s}$ есть плотность момента импульса, $\boldsymbol{l}$ — плотность пар внешних сил. Следует отметить, что тензор напряжений Коши T не является симметричным. В общем случае $\boldsymbol{s} = \Theta \boldsymbol{w}$, где Θ — симметричный тензор микроинерции, удовлетворяющий уравнению $\dot\Theta - \Omega\Theta + \Theta\Omega = 0$.

В отсутствие внешних источников тепла изменение полной энергии E описывается уравнением

$$\rho \dot E = \operatorname{div}\,(T^* \boldsymbol{v} + N^* \boldsymbol{w} - \boldsymbol{q}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{w},$$

где $E = e + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}/2 + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{w}/2$; e — удельная внутренняя энергия; $\boldsymbol{q}$ — приток тепла, задаваемый законом Фурье. В общем случае $e = e(\eta, \rho, \Theta)$, где η — удельная энтропия.